# RÉFLEXIONS

SUR

# LA MÉTAPHYSIQUE

DU

# CALCUL INFINITÉSIMAL,

*Par le Citoyen* CARNOT, *Membre de l'Institut national.*



---

A PARIS,
Chez DUPRAT, Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins.

An V, (1797).

# *AVERTISSEMENT.*

Il y a quelques années que l'Auteur de ces Réflexions les a rédigées dans la forme où on les présente aujourd'hui. Il est maintenant chargé de soins dont l'importance ne lui permet pas de revenir sur ses premières méditations ; mais comme tout annonce que la culture des Mathématiques va reprendre un nouvel essor, on a pensé qu'il pourroit être utile de faire connoître un Mémoire où la Métaphysique du Calcul différentiel est discutée avec étendue et précision, et où sont rapprochés les divers points de vue sous lesquels on a présenté cette Métaphysique.

# RÉFLEXIONS

SUR

# LA MÉTAPHYSIQUE

DU

# CALCUL INFINITESIMAL.

(1) Il n'est aucune découverte qui ait produit dans les sciences mathématiques une révolution aussi heureuse et aussi prompte que celle de l'analyse infinitésimale; aucune n'a fourni des moyens plus simples ni plus efficaces pour pénétrer dans la connoissance des lois de la nature. En décomposant, pour ainsi dire, les corps jusques dans leurs élémens, elle semble en avoir indiqué la structure intérieure et l'organisation; mais comme tout ce qui est extrême échappe aux sens et à l'imagination, on n'a jamais pu se former qu'une idée imparfaite de ces élémens, espèces d'êtres singuliers, qui, tantôt jouent le rôle de véritables quantités, tantôt doi-

Sujet de cet écrit.

vent être traités comme absolument nuls, et semblent par leurs propriétés équivoques, tenir le milieu entre la grandeur et le zéro, entre l'existence et le néant (*).

Heureusement cette difficulté n'a point nui au progrès de la découverte : il est certaines idées primitives qui laissent toujours quelque nuage dans l'esprit; mais dont les premières conséquences une fois tirées, ouvrent un champ vaste et facile à parcourir. Telle a paru celle de l'infini, et plusieurs Géomètres en ont fait le plus heureux usage, qui n'en avoient peut être point approfondi la notion; cependant les Philosophes n'ont pu se contenter d'une idée si vague; ils ont vou uremonter aux principes; mais ils se sont

(*) Je parle ici conformément aux idées vagues qu'on se fait communément des quantités infinitésimales, lorsqu'on n'a pas pris la peine d'en examiner la nature; mais, dans le vrai, rien n'est plus simple que la notion de ces quantités. En effet, dire d'une quantité qu'elle est infiniment petite, c'est précisément dire qu'elle est la différence de deux grandeurs qui ont pour limite une même troisième grandeur et rien de plus. L'idée d'une quantité infinitésimale n'est donc pas plus difficile à saisir que celle d'une limite; mais elle a de plus, comme tout le monde en convient, l'avantage de conduire à une théorie beaucoup plus simple.

trouvés eux-mêmes divisés dans leurs opinions, ou plutôt dans leur manière d'envisager les objets. Mon but dans cet écrit est de rapprocher ces différens points de vue, d'en montrer les rapports, et d'en proposer de nouveaux; je me croirai bien récompensé de mon travail si j'ai pu réussir à jetter quelques degrés de lumière sur un sujet si intéressant.

(2) La difficulté qu'on rencontre souvent à exprimer exactement par des équations les différentes conditions d'un problême, et à résoudre ces équations, a pu faire naître les premières idées du Calcul infinitésimal. Lorsqu'il est trop difficile, en effet, de trouver la solution exacte d'une question, il est naturel de chercher au moins à en approcher le plus qu'il est possible, en négligeant les quantités qui embarrassent les combinaisons, si l'on prévoit que ces quantités négligées ne peuvent, à cause de leur peu de valeur, produire qu'une erreur légère dans le résultat du calcul. C'est ainsi, par exemple, que ne pouvant découvrir qu'avec peine les propriétés des courbes, on aura imaginé de les regarder comme des polygones d'un grand nombre de côtés. En effet, si l'on conçoit,

Origine que peut avoir eue l'analyse infinitésimale.

par exemple, un polygone régulier inscrit dans un cercle, il est visible que ces deux figures, quoique toujours différentes et ne pouvant jamais devenir identiques, se ressemblent cependant de plus en plus à mesure que le nombre des côtés du polygone augmente, que leurs périmètres, leurs surfaces, les solides formés par leurs révolutions autour d'un axe donné, les lignes analogues menées au dedans ou au dehors de ces figures, les angles formés par ces lignes, etc., sont, si non respectivement égaux, au moins d'autant plus approchans de l'égalité que ce nombre de côtés devient plus grand; d'où il suit qu'en supposant ce nombre de côtés très-grand en effet, on pourra sans erreur sensible attribuer au cercle circonscrit les propriétés qu'on aura trouvées appartenir au polygone inscrit.

En outre, chacun des côtés de ce polygone diminue évidemment de grandeur à mesure que le nombre de ces côtés augmente; et par conséquent, si l'on suppose que le polygone soit réellement composé d'un très-grand nombre de côtés, on pourra dire aussi que chacun d'eux est réellement très-petit.

Cela posé, s'il se trouvoit par hasard dans le cours d'un calcul une circonstance parti-

culière où l'on pût simplifier beaucoup les opérations en négligeant, par exemple, un de ces petits côtés par comparaison à une ligne donnée, c'est-à-dire, en employant dans le calcul cette ligne donnée au lieu d'une quantité qui seroit égale à la somme faite de cette ligne et du petit côté en question, il est clair qu'on pourroit le faire sans inconvénient, car l'erreur qui en résulteroit ne pourroit être qu'extrêmement petite, et ne mériteroit pas qu'on se mît en peine pour en connoître la valeur.

(3) Par exemple, soit proposé de mener une tangente au point donné M de la circonférence MBD. (*Fig.* 1.)

Soit C le centre du cercle, DCB l'axe; supposons l'abscisse $DP = x$, l'ordonnée correspondante $MP = y$, et soit TP la sous-tangente cherchée.

Pour la trouver, considérons le cercle comme un polygone d'un très-grand nombre de côtés; soit MN un de ces côtés, prolongeons-le jusqu'à l'axe; ce sera évidemment la tangente en question, puisque cette ligne ne pénétrera pas dans l'intérieur du polygone; abaissons de plus la perpendiculaire MO sur NQ, parallèle à MP, et nommons $a$ le rayon du cercle; cela

posé, nous aurons évidemment MO : NO :: TP : MP, ou $\frac{MO}{NO} = \frac{TP}{y}$.

D'une autre part, l'équation de la courbe étant pour le point M, $yy = 2ax - xx$, elle sera pour le point N

$$(y + NO)^2 = 2a(x + MO) - (x + MO)^2,$$

ôtant de cette équation la première, trouvée pour le point M, et réduisant, on a

$$\frac{MO}{NO} = \frac{2y + NO}{2a - 2x - MO};$$

égalant donc cette valeur de $\frac{MO}{NO}$ à celle qui a été trouvée ci-dessus, et multipliant par $y$, il vient $TP = \frac{y(2y + NO)}{2a - 2x - MO}$.

Si donc MO et NO étoient connues, on auroit la valeur cherchée de TP; or ces quantités MO, NO sont très-petites, puisqu'elles sont moindres chacune que le côté MN, qui, par hypothèse, est lui-même très-petit. Donc (2) on peut négliger sans erreur sensible ces quantités par comparaison aux quantités $2y$ et $2x - 2a$ auxquelles elles sont ajoutées. Donc l'équation se réduit à $TP = \frac{y^2}{a - x}$, ce qu'il falloit trouver.

(4) Si ce résultat n'est pas absolument

exact, il est au moins évident que dans la pratique il peut passer pour tel, puisque les quantités MO, NO sont extrêmement petites; mais quelqu'un qui n'auroit aucune idée de la doctrine des infinis seroit peut-être fort étonné si on lui disoit que l'équation $TP = \frac{y^2}{a-x}$, non-seulement approche beaucoup du vrai, mais est réellement de la plus parfaite exactitude; c'est cependant une chose dont il est aisé de s'assurer en cherchant TP, d'après ce principe que la tangente est perpendiculaire à l'extrémité du rayon; car il est visible que les triangles semblables CPM, MPT donnent CP : MP :: MP : TP; d'où l'on tire $TP = \frac{\overline{MP}^2}{CP} = \frac{y^2}{a-x}$, comme ci-dessus.

On a dû naturellement la regarder d'abord comme une simple méthode d'approximation.

(5) Pour second exemple, supposons qu'il soit question de trouver la surface d'un cercle donné.

Considérons encore cette courbe comme un polygone régulier d'un grand nombre de côtés; l'aire d'un polygone régulier quelconque est égale au produit de son périmètre par la moitié de la perpendiculaire menée du centre sur l'un des côtés; donc le cercle

étant considéré comme un polygone d'un grand nombre de côtés, sa surface doit être égale au produit de sa circonférence par la moitié du rayon; proposition qui n'est pas moins exacte que le résultat trouvé ci-dessus.

(6) Quelque vagues et peu précises que puissent donc paroître ces deux expressions de *très-grand* et de *très-petit*, ou autres équivalentes, on voit par les deux exemples précédens que ce n'est pas sans utilité qu'on les emploie dans les combinaisons mathématiques, et que leur usage peut être d'un grand secours pour faciliter la solution des diverses questions qui peuvent être proposées; car leur notion une fois admise, toutes les courbes pourront aussi bien que le cercle être considérées comme des polygones d'un grand nombre de côtés, toutes les surfaces pourront être partagées en une multitude de bandes ou zônes, tous les corps en corpuscules, toutes les quantités, en un mot, pourront être décomposées en particules de même espèce qu'elles. De-là naissent beaucoup de nouveaux rapports et de nouvelles combinaisons, et l'on peut juger aisément, par les exemples cités plus haut, des ressources que doit fournir au calcul l'introduction de ces quantités élémentaires.

(7) Mais l'avantage qu'elles procurent est bien plus considérable encore qu'on n'avoit d'abord eu lieu de l'espérer; car il suit des exemples rapportés que ce qui n'avoit été regardé en premierlieu que comme une simple méthode d'approximation, conduit au moins, en certains cas, à des résultats parfaitement exacts. Il seroit donc intéressant de savoir distinguer ceux où cela arrive, d'y ramener les autres autant qu'il est possible, et de changer ainsi cette méthode d'approximation en un calcul parfaitement exact et rigoureux. Or, tel est l'objet de l'analyse infinitésimale.

On a découvert ensuite que malgré les erreurs commises dans l'expression des conditions de chaque problême, les résultats étoient néanmoins de la plus parfaite exactitude.

(8) Voyons donc d'abord comment dans l'équation $TP = \frac{y(2y + NO)}{2a - 2x - MO}$ trouvée (3), il a pu se faire qu'en négligeant MO et NO on n'ait point altéré la justesse du résultat, ou plutôt comment ce résultat est devenu exact par la suppression de ces quantités, et pourquoi il ne l'étoit pas auparavant.

Or, on peut rendre fort simplement raison de ce qui est arrivé dans la solution du problême traité ci-dessus, en remarquant que l'hypothèse d'où l'on est parti étant fausse, puisqu'il est absolument impossible qu'un cercle puisse être jamais considéré comme un

vrai polygone, quel que puisse être le nombre de ses côtés, il a dû résulter de cette hypothèse une erreur quelconque dans l'équation

$$TP = \frac{y(2y + NO)}{2a - 2x - MO},$$

et que le résultat $TP = \frac{y^2}{a-x}$ étant néanmoins certainement exact, comme on le prouve par la comparaison des deux triangles CPM, MPT, on a pu négliger MO et NO dans la première équation, et même on a dû le faire pour rectifier le calcul et détruire l'erreur à laquelle avoit donné lieu la fausse hypothèse d'où l'on étoit parti. Négliger les quantités de cette nature est donc non-seulement permis en pareil cas, mais il le faut, et c'est la seule manière d'exprimer exactement les conditions du problême.

Ces résultats ne sont exacts que par compensation d'erreurs.

(9) Le résultat exact $TP = \frac{y^2}{a-x}$ n'a donc été obtenu que par une compensation d'erreurs; et cette compensation peut être rendue plus sensible encore en traitant l'exemple rapporté ci-dessus d'une manière un peu différente, c'est-à-dire, en considérant le cercle comme une véritable courbe et non pas comme un polygone.

Pour cela, par un point R, pris arbitrairement à une distance quelconque du point M, soit menée la ligne RS parallèle à MP, et par les points R et M soit tirée la sécante RT′; nous aurons évidemment T′P : MP :: MZ : RZ, et partant T′P, ou TP + T′T $= MP \frac{MZ}{RZ}$. Cela posé, si nous imaginions que RS se meuve parallélement à elle-même en s'approchant continuellement de MP, il est visible que le point T′ s'approchera en même tems de plus en plus du point T, et qu'on pourra par conséquent rendre la ligne T′T aussi petite qu'on voudra sans que la proportion établie ci-dessus cesse d'avoir lieu. Si donc je néglige cette quantité T′T dans l'équation que je viens de trouver, il en résultera à la vérité une erreur dans l'équation $TP = MP \frac{MZ}{RZ}$ à laquelle la première sera alors réduite; mais cette erreur pourra être atténuée autant qu'on le voudra en faisant approcher autant qu'il sera nécessaire RS de MP : c'est-à-dire, que le rapport des deux membres de cette équation différera aussi peu qu'on voudra du rapport d'égalité.

Pareillement nous avons $\frac{MZ}{RZ} = \frac{2y + RZ}{2a - 2x - MZ}$ (3)

et cette équation est parfaitement exacte, quelle que soit la position du point R, c'est-à-dire, quelles que soient les valeurs de MZ et de RZ. Mais plus RS approchera de MP, plus ces lignes MZ et RZ seront petites; et partant, si on les néglige dans le second membre de cette équation, l'erreur qui en résultera dans l'équation $\frac{MZ}{RZ} = \frac{y}{a-x}$ à laquelle elle sera réduite alors, pourra comme la première être rendue aussi petite qu'on le jugera à propos.

Cela étant, sans avoir égard à des erreurs que je serai toujours maître d'atténuer autant que je le voudrai, je traite les deux équations $TP = MP\frac{MZ}{RZ}$ et $\frac{MZ}{RZ} = \frac{y}{a-x}$ que je viens de trouver comme si elles étoient parfaitement exactes l'une et l'autre; substituant donc dans la dernière la valeur de $\frac{MZ}{RZ}$ tirée de l'autre, j'ai pour résultat $TP = \frac{y^2}{a-x}$ comme ci-dessus.

Ce résultat est parfaitement juste, puisqu'il est conforme à celui qu'on a obtenu par la comparaison des triangles CPM, MPT; et cependant

cependant les équations $TP = y\,\frac{MZ}{RZ}$ et $\frac{MZ}{RZ} = \frac{y}{a-x}$, d'où il a été tiré, sont certainement fausses toutes deux, puisque la distance de RS à MP n'a point été supposée nulle, ni même très-petite, mais bien égale à une ligne quelconque arbitraire. Il faut par conséquent de toute nécessité que les erreurs se soient compensées mutuellement par la comparaison des deux équations erronées.

(10) Voilà donc le fait des erreurs compensées bien acquis et bien prouvé; il s'agit maintenant de l'expliquer, de rechercher le signe auquel on reconnoît que la compensation a lieu dans les calculs semblables au précédent, et les moyens de la produire dans chaque cas particulier.

Pourquoi cette compensation a lieu.

Or, il suffit pour cela de remarquer que les erreurs commises dans les équations $TP = y\,\frac{MZ}{RZ}$ et $\frac{MZ}{RZ} = \frac{y}{a-x}$ pouvant être rendues aussi petites qu'on le veut, celle qui auroit lieu, s'il s'en trouvoit une dans l'équation résultante $TP = \frac{y^2}{a-x}$, pourroit également être rendue aussi petite qu'on le vou-

droit, et qu'elle dépendroit de la distance arbitraire des lignes MP, RS. Or, cela n'est pas, puisque le point M par où doit passer la tangente étant donné, il ne se trouve aucune des quantités $a$, $x$, $y$, TP de cette équation qui soit arbitraire; donc il ne peut y avoir en effet aucune erreur dans cette équation.

Il suit de-là que la compensation des erreurs qui se trouvoient dans les équations $TP = y\frac{MZ}{RZ}$ et $\frac{MZ}{RZ} = \frac{y}{a-x}$, se manifeste dans le résultat par l'absence des quantités MZ, RZ qui causoient ces erreurs; et que par conséquent, après avoir introduit ces quantités dans le calcul pour faciliter l'expression des conditions du problême, et les avoir traitées dans les équations qui exprimoient ces conditions comme nulles par comparaison aux quantités proposées, afin de simplifier ces équations, il n'y a qu'à éliminer ces mêmes quantités des équations où elles peuvent se trouver encore, pour faire disparoître les erreurs qu'elles avoient occasionnées, et obtenir un résultat qui soit parfaitement exact.

(11) L'inventeur a donc pu être conduit à sa découverte par un raisonnement bien

simple : si à la place d'une quantité proposée, a-t-il pu dire, j'emploie dans le calcul une autre quantité qui ne lui soit point égale, il en résultera une erreur quelconque ; mais si la différence des quantités employées l'une pour l'autre est arbitraire, et que je sois maître de la rendre aussi petite que je voudrai, cette erreur ne sera point dangereuse ; je pourrois même commettre à la fois plusieurs erreurs semblables sans qu'il s'ensuivît aucun inconvénient, puisque je demeurerai toujours maître du degré de précision que je voudrai donner à mes résultats. Il y a plus encore ; c'est qu'il pourroit arriver que ces erreurs se compensassent mutuellement, et qu'ainsi mes résultats devinssent parfaitement exacts. Mais comment opérer cette compensation et dans tous les cas ? C'est ce qu'un peu de réflexion aura pu faire découvrir ; en effet, aura pu dire l'inventeur, supposons pour un instant que la compensation desirée ait lieu, et voyons par quel signe elle doit se manifester dans le résultat du calcul. Or, ce qui doit naturellement arriver, c'est que les quantités qui occasionnoient ces erreurs ayant disparu, les erreurs aient disparu de même ; car ces quantités (telles que MZ, RZ) ayant par hypothèse des valeurs arbitraires, elles ne doivent plus

entrer dans des formules ou résultats qui ne le sont pas, et qui étant devenus exacts par supposition, dépendent uniquement, non de la volonté du calculateur, mais de la nature des choses dont on s'étoit proposé de trouver la relation exprimée par ces résultats. Donc le signe qui annonce que la compensation desirée a lieu est l'absence des quantités arbitraires qui produisoient ces erreurs; et partant, il ne s'agit, pour opérer cette compensation, que d'éliminer ces quantités arbitraires.

Comment on peut opérer cette compensation en chaque cas particulier.

(12) Pour fixer davantage ces idées, et donner aux principes qui en dérivent le degré de précision et de généralité qui leur convient, je remarquerai que les quantités que nous avons eu à considérer dans la question traitée peuvent se distinguer en deux classes; la première, composée des quantités qui, comme MC, MP, PT, MT, sont ou données ou déterminées par les conditions du problême; et la seconde, composée des quantités qui, comme RS, RT′, ST′, dépendent de la position arbitraire du point R, et telles en même tems, qu'à mesure que ce point R se rapproche du point M, chacune d'entre elles s'approche de sa correspondante dans la première classe, en sorte que MP, par

exemple, est la limite de RS, c'est-à-dire, le terme fixe dont elle approche continuellement, ou, si l'on veut, sa dernière valeur; de même MT est la limite ou dernière valeur de RT′, et PT celle de ST′; par la même raison, il est clair que les limites ou dernières valeurs de MZ, RZ, MR, T′T, sont toutes o; enfin, il est encore évident que la dernière raison de RS à MP, c'est-à-dire, la dernière valeur de $\frac{RS}{MP}$ est une raison d'égalité, de même que celle de RT′ à MT, de ST′ à PT, ou, enfin, celle de toute autre quantité quelconque à sa limite.

(13) Imaginons donc maintenant, pour étendre ces remarques aux autres problêmes du même genre, un systême quelconque de quantités proposées, et qu'il soit question de trouver les rapports qui existent entre elles (*).

(*) Je suppose ici que la question proposée a été préalablement réduite à trouver en effet les rapports qui existent entre telles ou telles quantités proposées. Si, par exemple, il s'agit de trouver une courbe qui ait une certaine propriété déterminée, je suppose qu'on ait préalablement réduit cette question à trouver le rapport qui

(14) D'abord je comprendrai sous le nom de *quantités désignées*, non-seulement toutes les quantités qui sont proposées par l'énoncé même de la question, mais encore toutes celles qui dépendent de ces seules quantités, c'est-à-dire, qui sont fonctions de ces mêmes quantités et d'aucune autre.

---

existe entre telle ordonnée de cette courbe et l'abscisse correspondante; de même, s'il s'agit de mener une tangente à un point quelconque indéterminé de cette courbe, je commence par fixer arbitrairement le point par lequel je veux mener cette tangente, et je réduis la question à trouver le rapport qui existe, par exemple, entre la sous-tangente et l'abscisse, ou entre l'ordonnée et la sous-normale correspondante à ce même point. Mais si l'on me demandoit, par exemple, comment j'appliquerois ma définition de *l'infini* qu'on va voir, à ces questions: *La matière est-elle divisible à l'infini? L'espace dans lequel existent tous les êtres créés est-il infini?* et autres semblables; je réponds que ma définition n'est que celle de l'infini mathématique; qu'elle ne peut s'appliquer qu'aux questions dont l'objet est uniquement de trouver les rapports qui existent entre telles et telles quantités; et qu'ainsi les questions métaphysiques proposées ci-dessus, si tant est qu'elles méritent d'être appelées des questions, ne sont aucunement du ressort de la théorie dont on se propose d'établir ici les principes.

(15) J'appellerai, au contraire, *quantités non-désignées* ou *auxiliaires* toutes celles qui ne font point partie du systême des quantités désignées, et qui par conséquent n'entrent point essentiellement dans le calcul, mais y sont introduites seulement pour faciliter la comparaison des quantités proposées.

Ainsi, dans l'exemple précédent, MP, MC, MT, DP, etc. sont des quantités *désignées*, parce qu'elles dépendent uniquement de la position du point M par où doit être menée la tangente; mais RS, et toutes celles qui en dépendent, comme MZ, RZ, T'T, T'P, etc. sont des quantités *auxiliaires*, parce qu'on n'a imaginé de les mener que pour aider à la solution de la question, qui étoit de trouver le rapport de MP à TP.

Il suit évidemment de-là que dans toute quantité non-désignée, il y a nécessairement quelque chose d'arbitraire; car, s'il n'y entroit rien d'arbitraire, la valeur en seroit donc assignée par les conditions mêmes du problême, et par conséquent dépendroit totalement des quantités proposées, ce qui est contre l'hypothèse.

(16) Lorsqu'en mathématique, deux lignes, deux surfaces, deux solides, deux

quantités quelconques enfin sont supposées s'approcher perpétuellement l'une de l'autre par degrés insensibles, de manière que leur rapport ou quotient diffère de moins en moins et aussi peu qu'on veut de l'unité, on dit que ces deux quantités ont pour dernière raison une raison d'égalité.

(17) Si l'une de ces grandeurs est une quantité désignée et l'autre une quantité auxiliaire, la première sera dite *limite* ou *dernière valeur* de la seconde : c'est-à-dire, qu'une *limite* n'est autre chose qu'une quantité désignée de laquelle une quantité auxiliaire est supposée s'approcher perpétuellement, de manière qu'elle puisse en différer aussi peu qu'on voudra, et que leur dernière raison soit une raison d'égalité.

Ainsi, il n'y a que les quantités auxiliaires qui, à proprement parler, aient ce que j'appelle une limite; car les quantités désignées étant supposées ne point changer, mais au contraire être elles-mêmes les termes ou dernières valeurs des quantités auxiliaires, elles ne peuvent strictement parlant avoir de limites, à moins qu'on ne dise que toute quantité désignée est elle-même sa propre limite, ce qu'on ne peut refuser d'accorder, puisque

la dernière valeur d'une quantité déterminée quelconque ne peut être que cette quantité elle-même.

(18) Ainsi, en général nous nommons dernières valeurs et dernières raisons des quantités les valeurs ou les raisons qui sont en effet les dernières de celles qu'assigne à ces grandeurs et à leurs rapports, la loi de continuité, lorsque chacune d'elles est supposée s'approcher perpétuellement et par degrés insensibles de la quantité désignée qui lui répond.

(19) On nomme en général quantité *infiniment petite* la différence d'une quantité quelconque auxiliaire à sa limite; ainsi, par exemple, RZ, qui est la différence de RS à MP, est ce qu'on appelle une quantité infiniment petite.

(20) On nomme au contraire *infinie* ou *infiniment grande*, toute grandeur qui est égale à l'unité divisée par une quantité infiniment petite : telle est, par conséquent, la quantité $\frac{1}{RZ}$ ou $\frac{1}{RS-MP}$.

Mais puisque la limite ou dernière valeur de RS est MP, il est clair que la limite ou

dernière valeur de R Z ou RS — MP est o, et que celle de $\frac{1}{RZ}$ est $\frac{1}{o}$.

(21) Ainsi on peut dire en général qu'*une grandeur infiniment petite n'est autre chose qu'une quantité dont la limite est* o, et qu'au contraire, *une quantité infiniment grande n'est autre chose qu'une quantité dont la limite est* $\frac{1}{o}$.

(22) On comprend sous le nom de *quantités infinitésimales* les quantités infinies ou infiniment grandes, et celles qui sont infiniment petites; toutes les autres grandeurs se nomment *quantités finies*.

(23) Dire, suivant l'usage vulgaire, que l'infini est ce qui n'a point de bornes, ce qui est sans limite, ou ce dont la limite n'existe pas, c'est donc en donner une idée simple et qui n'est pas sans fondement, puisqu'en effet les quantités infinitésimales ont toutes pour limites, les unes o, les autres $\frac{1}{o}$, qui ne sont point de vraies quantités.

(24) Mais de ce que les limites de ces quantités

sont o ou $\frac{1}{0}$, il ne s'ensuit nullement que ces quantités elles-mêmes soient des êtres chimériques; car, au contraire, par la définition même (19), une quantité infiniment petite est la différence de deux quantités très-effectives, savoir, une quantité quelconque auxiliaire et sa limite.

(25) Il suit encore de-là qu'on peut regarder toute quantité infiniment petite comme la différence de deux quantités auxiliaires qui ont pour limite une même troisième quantité désignée; car, soient X et Y deux quantités auxiliaires différentes qui aient pour limite une même troisième quantité A.

Je dis que X—Y est une quantité infiniment petite. En effet, puisque la limite ou dernière valeur de X est A, et que celle de Y est aussi A; il s'ensuit que la dernière valeur de X—Y sera A—A ou o. Donc la limite de A+(X—Y) est A; donc on peut regarder X—Y comme la différence d'une quantité auxiliaire A+(X—Y) à sa limite A; donc (19) cette différence est une quantité infiniment petite; donc on peut dire en général qu'*une quantité infiniment petite n'est autre chose que la différence de*

*deux quantités auxiliaires qui ont la même limite.*

(26) Deux quantités ne peuvent avoir pour limite une même troisième quantité sans avoir elles-mêmes entre elles pour dernière raison une raison d'égalité ; car, puisque par hypothèse, la limite ou dernière valeur de $\frac{X}{A}$ est 1, de même que celle de $\frac{Y}{A}$; il est clair que la limite ou dernière valeur de $\frac{\left(\frac{X}{A}\right)}{\left(\frac{Y}{A}\right)}$ est aussi l'unité. Or $\frac{\left(\frac{X}{A}\right)}{\left(\frac{Y}{A}\right)} = \frac{X}{Y}$; donc la limite ou dernière valeur de $\frac{X}{Y}$ est 1, c'est-à-dire, que la dernière raison de X à Y est une raison d'égalité. Donc, en général, on peut dire qu'*une quantité infiniment petite est le rapport de la différence de deux grandeurs qui ont pour dernière raison une raison d'égalité à chacune de ces grandeurs.*

(27) Enfin, il est évident qu'on peut dire

encore qu'*une grandeur infiniment petite n'est autre chose qu'une quantité non désignée, à laquelle on attribue d'abord une valeur quelconque arbitraire, et qu'on suppose ensuite décroître insensiblement jusqu'à zéro.* Ainsi, en général, lorsqu'on dit, *soit* Z, *par exemple, une quantité infiniment petite*, c'est précisément la même chose que si l'on disoit, *soit* Z *une quantité quelconque arbitraire* (et par conséquent auxiliaire, car les quantités désignées ne peuvent être arbitraires), *et supposons ensuite que cette quantité aille en décroissant perpétuellement jusqu'à zéro.*

(28) Une quantité est dite infiniment petite, *relativement* à une autre quantité, lorsque le rapport de la première à la seconde est une quantité infiniment petite, et réciproquement, la seconde est dite infinie ou infiniment grande *relativement à la première.*



(29) Deux quantités sont dites *différer infiniment peu*, ou *être infiniment peu différentes* l'une de l'autre, lorsque le rapport de l'une à l'autre ne diffère de l'unité que d'une quantité infiniment petite, de manière que leur dernière raison soit une raison d'égalité; telles sont évidemment RS et MP.

(30) On nomme *Calcul infinitésimal* l'art qui enseigne à découvrir, par le secours des quantités que je viens de nommer infinitésimales, les rapports ou relations quelconques qui existent entre les diverses parties d'un système quelconque de quantités proposées.

Ces quantités infinitésimales n'étant toutes que des quantités auxiliaires, c'est-à-dire, introduites seulement dans le calcul pour faciliter l'expression des conditions proposées, il est clair qu'il faut absolument les éliminer du calcul pour obtenir le résultat desiré, c'est-à-dire, les rapports cherchés; ainsi on peut dire en quelque sorte que le calcul infinitésimal est un calcul *non fini*, ou qui n'est pas encore achevé, parce qu'en effet dès qu'on est parvenu à en éliminer les quantités auxiliaires et qui n'y entrent pas essentiellement, il cesse d'être infinitésimal, et ressemble en tout au calcul algébrique ordinaire (*).

Pour achever d'expliquer les principaux

(*) Chacun sait, en effet, qu'un calcul où il entre des quantités infinitésimales n'est censé fini, et que l'on ne compte sur l'exactitude du résultat, que du moment où toutes ces quantités infinitésimales sont entièrement éliminées.

termes relatifs à la théorie de l'infini en général, il me reste à dire ce que j'entends par *équation imparfaite.*

(31) J'appelle *équation imparfaite* toute équation dont les deux membres sont des quantités inégales, mais infiniment peu différentes l'une de l'autre, ou, ce qui revient au même, toute équation dont les deux membres, quoique inégaux, ont pour dernière raison une raison d'égalité.

Ainsi, par exemple, les équations fausses $TP=y\frac{MZ}{RZ}$ et $\frac{MZ}{RZ}=\frac{y}{a-x}$ trouvées (9), sont ce que j'appelle équations imparfaites, puisque les quantités négligées dans les équations exactes d'où elles sont tirées sont des quantités infiniment petites; c'est donc sur la théorie de ces sortes d'équations qu'est fondée la solution de la question traitée ci-dessus et de toutes celles du même genre. C'est pourquoi je vais rechercher les principes de cette théorie que est la base du calcul infinitésimal, ou, plutôt, qui n'est autre chose que le calcul infinitésimal lui-même.

## THEORÉME I^er.

Principes fondamentaux de l'analyse infinitésimale.

(32) *Si dans une équation quelconque imparfaite on substitue à la place de l'une quelconque des quantités qui y entrent, une autre quantité qui en diffère infiniment peu, ou dont le rapport à la première ait l'unité pour limite ou dernière valeur, l'équation qui résultera de cette transformation ne pourra être une équation fausse, c'est-à-dire, qu'elle deviendra absolument exacte, ou qu'au moins elle demeurera ce que j'ai nommé équation imparfaite.*

En effet, puisque par hypothèse on n'a fait que substituer à la place d'une quantité une autre quantité dont la dernière valeur est la même, et dont le rapport à la première a l'unité pour limite, il est clair que cette substitution n'a rien pu changer aux dernières valeurs des membres de l'équation proposée, ni à leur dernière raison. Or cette dernière raison étoit, par hypothèse, l'unité avant la substitution ; donc elle la sera encore après; donc l'équation conservera le caractère de celles que j'ai nommées imparfaites, à moins qu'elle ne devienne rigoureusement exacte : ce qu'il falloit prouver.

THÉORÊME

## THÉORÊME II.

(33) *Toute équation qui ne contient que des quantités désignées, ne peut être une équation imparfaite.*

En effet, par la définition des équations imparfaites, leurs membres sont inégaux; mais différant infiniment peu l'un de l'autre, leur rapport approche autant qu'on veut du rapport d'égalité; donc il entre dans cette équation quelque quantité qui ne fait point partie du système des quantités proposées; mais par l'hypothèse, au contraire, l'équation proposée ne contient que des quantités désignées. Donc elle ne peut être ce que j'ai nommé équation imparfaite : ce qu'il falloit prouver.

## THÉORÊME III.

(34) *Toute équation imparfaite à laquelle on n'aura fait subir que des transformations semblables à celle qui est indiquée dans le théorême premier, et de laquelle on sera parvenu à éliminer par ces transformations toutes les quantités non désignées, sera nécessairement et rigoureusement exacte.*

Car, par le théorême premier, ce ne peut être une équation absolument fausse, et par le second, ce ne peut être une équation imparfaite; donc elle est nécessairement et rigoureusement exacte.

## COROLLAIRE.

(35) Tout ce qui vient d'être dit au sujet des équations imparfaites, doit s'entendre également des proportions, propositions et raisonnemens quelconques susceptibles d'être traduits par de semblables équations.

## SCHOLIE.

En quoi consiste l'esprit de cette analyse.

(36) Tels sont les principes généraux auxquels se réduit la théorie du calcul infinitésimal. On voit par ces principes que, si ayant exprimé par des équations imparfaites les conditions d'un problême, on parvient ensuite par des transformations semblables à celle qui est indiquée dans le théorême premier, on parvient, dis-je, à éliminer de ces équations toutes les quantités auxiliaires ou non-désignées, il faudra nécessairement qu'il se soit opéré dans le cours du calcul une compensation d'erreurs; et que l'avantage de ce calcul

consiste en ce que les conditions d'une question étant souvent fort difficiles à exprimer exactement et par des équations rigoureuses, tandis qu'il seroit aisé de le faire par des équations imparfaites, il donne le moyen de tirer de ces équations imparfaites les mêmes résultats et des rapports tout aussi certains que si les équations primitives eussent été véritablement de la plus parfaite exactitude; et cela par la simple élimination des quantités dont la présence occasionnoit ces erreurs.

La raison de cela est simple : qu'on ait à découvrir les relations qui existent entre plusieurs quantités proposées; s'il est difficile de trouver directement des équations qui expriment ces relations, il est naturel de recourir à quelques quantités intermédiaires qui leur servent de termes de comparaison; par ce moyen on pourra obtenir, sinon les équations mêmes cherchées, au moins d'autres équations où les quantités proposées se trouveront mêlées avec ces quantités auxiliaires; il ne sera donc plus question que d'éliminer celles-ci. Mais si en outre les valeurs de ces quantités auxiliaires sont arbitraires et peuvent être supposées aussi petites qu'on veut sans rien changer aux quantités proposées, il est aisé de sentir que si dans les équations qui ex-

priment les relations cherchées, les quantités arbitraires se trouvent mêlées avec les quantités proposées, chacune de ces équations pourra se décomposer en deux autres, dont l'une ne contiendra que des quantités désignées, et l'autre renfermera des arbitraires, à peu près de même qu'une équation qui contient des quantités réelles et des quantités imaginaires peut se décomposer en deux, l'une entre quantités réelles, l'autre entre quantités imaginaires. Or, comme on n'a besoin que de l'équation qui existe entre les quantités proposées, il est clair qu'on peut sans inconvénient, dans celles où elles se trouvent mêlées avec les arbitraires, négliger les quantités qui embarrassent le calcul, lorsque les erreurs qui doivent en résulter ne peuvent tomber que sur l'équation entre arbitraires qu'elle renferme. Or c'est précisément ce qui arrive dans le calcul infinitésimal, lorsqu'on traite comme nulles, en comparaison des quantités finies, celles que nous avons nommées infiniment petites.

Afin de rendre cette explication plus sensible encore, reprenons l'exemple traité ci-dessus. Nous avons trouvé (9)

$$TP+T'T=y\times\frac{MZ}{RZ} \text{ et } \frac{MZ}{RZ}=\frac{2y+RZ}{2a-2x-MZ};$$

équations parfaitement exactes l'une et l'autre, quelles que soient les valeurs de MZ et de RZ; tirant donc de la première de ces équations la valeur de $\frac{MZ}{RZ}$, et la substituant dans la seconde, j'ai

$$\frac{TP + T'T}{y} = \frac{2y + RZ}{2a - 2x - MZ},$$

équation exacte et qui doit avoir lieu, quelle que soit la distance qu'on voudra mettre entre les lignes RS et MP.

Or, il est aisé de voir que je puis mettre cette équation sous la forme suivante :

$$\left(\frac{TP}{y} - \frac{y}{a-x}\right) + \left(\frac{T'T}{y} - \frac{yMZ + aRZ - xRZ}{(a-x)(2a-2x-MZ)}\right) = 0,$$

dans laquelle le premier terme ne contient que des quantités données ou déterminées par les conditions du problême, et dont le second contient des arbitraires, et peut être supposé aussi petit qu'on veut sans rien changer aux quantités qui sont contenues dans le premier terme, puisqu'on est maître de supposer RS aussi proche qu'on veut de MP. Donc, suivant la théorie des indéterminées, chacun des termes de cette équation, pris séparément, doit être égal à zéro; c'est-à-dire, que cette équation peut se décomposer

en ces deux autres :

$$\frac{TP}{y} - \frac{y}{a-x} = 0 \text{ et } \frac{T'T}{y} - \frac{yMZ + aRZ - xRZ}{(a-x)(2a-2x-MZ)} = 0,$$

desquelles la première ne contient que des quantités désignées, et la seconde contient des arbitraires. Mais nous n'avons besoin que de la première, puisque c'est celle qui nous donne la valeur cherchée de TP, telle que nous l'avons déjà trouvée ci-devant. Donc, quand même nous aurions commis des erreurs dans le cours du calcul, pourvû que ces erreurs ne fussent tombées que sur la dernière équation, l'exactitude du résultat cherché n'en auroit point souffert; et c'est effectivement ce qui seroit arrivé si nous eussions traité MZ, RZ et T'T comme nulles par comparaison aux quantités proposées $a$, $x$, $y$, dans les équations primitives; nous eussions à la vérité commis des erreurs dans l'expression des conditions du problême, mais ces erreurs se fussent détruites d'elles-mêmes par compensation, et le résultat dont nous avons besoin n'en eût été aucunement altéré.

L'analyse infinitésimale n'est autre chose qu'une application, ou si l'on veut une extension de la méthode des indéterminées.

(37) Il est aisé d'appercevoir, d'après ce qui vient d'être dit, que l'analyse infinitésimale n'est autre chose qu'une application, ou si l'on veut, une extension de la méthode des

indéterminées ; car, suivant cette méthode, je dis que lorsqu'on néglige une quantité infiniment petite, on ne fait, à proprement parler, que la *sous-entendre* et non la supposer nulle ; par exemple, lorsqu'au lieu des deux équations exactes $TP + T'T = MP \times \frac{MZ}{RZ}$ et $\frac{MZ}{RZ} = \frac{2y + RZ}{2a - 2x - MZ}$ trouvées (9), j'emploie les deux équations imparfaites $TP = MP \times \frac{MZ}{RZ}$ et $\frac{MZ}{RZ} = \frac{y}{a-x}$ ; je sais fort bien que je commets une erreur et je les mets, pour ainsi dire, mentalement sous cette forme $\frac{MZ}{RZ} \times MP = TP + \varphi$ et $\frac{MZ}{RZ} = \frac{y}{a-x} + \varphi'$ ; $\varphi$ et $\varphi'$ étant des quantités telles qu'il les faut pour que ces équations aient lieu exactement : de même dans l'équation $\frac{TP}{MP} = \frac{y}{a-x}$, résultante des deux équations imparfaites ci-dessus, je sous-entends la quantité $\varphi''$, telle que $\left(\frac{TP}{MP} - \frac{y}{a-x}\right) + \varphi'' = 0$ soit une équation exacte ; mais je reconnois bientôt que cette dernière quantité $\varphi''$ est égale à zéro, parce que si elle n'étoit pas nulle, elle ne pourroit

être qu'infiniment petite, tandis qu'il n'entre aucune quantité infinitésimale dans le premier terme; or cela est impossible, à moins que chacun de ces termes, pris séparément, ne soit égal à zéro; d'où je conclus qu'on a exactement $\frac{TP}{MP} = \frac{y}{a-x}$; et partant, les quantités $\varphi$, $\varphi'$ et $\varphi''$ ont été, non pas supprimées comme nulles, mais simplement sous-entendues pour simplifier le calcul. En effet, si X, par exemple, est une quantité arbitraire qui puisse être rendue aussi petite qu'on voudra, et qu'on ait une équation de cette forme,

$$A + BX + CX^2 + \text{etc.} = 0;$$

A, B, C, etc. étant indépendantes de X, cette équation ne peut avoir lieu sans que l'on ait $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, etc., c'est-à-dire, sans que chaque terme pris séparément ne soit égal à zéro, quel que soit le nombre de ces termes. Or, par la même raison, si l'on a en général une équation de cette forme, $P + Q = 0$, telle que P soit une fonction des quantités données ou déterminées par les conditions du problême, et au contraire, Q une quantité qu'on soit maître de supposer aussi petite qu'on veut, on aura nécessairement $P = 0$ et $Q = 0$; mais telle est pré-

cisément la nature de l'équation trouvée ci-dessus,

$$\left(\frac{TP}{y}-\frac{y}{a-x}\right)+\left(\frac{T'T}{y}-\frac{yMZ+aRZ-xRZ}{(a-x)(2a-2x-MZ)}\right)=0.$$

Donc chacun des termes de cette équation, pris séparément, est égal à zéro; donc on auroit pu négliger dans le cours du calcul les quantités T'T, MZ, RZ, qui n'entrent point dans le premier de ces termes, sans altérer ce premier terme; donc l'analyse infinitésimale ne diffère de la méthode des indéterminées, qu'en ce que dans la première on traite comme nulles, ou plutôt on sous-entend dans le cours du calcul des quantités qui se détruiroient toujours d'elles-mêmes dans le résultat, si on les laissoit subsister; au lieu que dans la méthode des indéterminées, on attend la fin du calcul pour faire disparoître les quantités arbitraires qui doivent être éliminées. Cette dernière méthode pourroit donc suppléer assez facilement à l'analyse infinitésimale sans employer le secours des équations imparfaites, et sans commettre jamais aucune erreur dans le cours du calcul.



(38) Il est encore un autre moyen de suppléer à l'analyse infinitésimale par le calcul

algébrique ordinaire ; c'est la méthode des limites ou dernières raisons. Car, quoique cette analyse soit fondée entièrement sur les propriétés des limites et dernières raisons, elle diffère cependant de ce qu'on nomme proprement méthode des limites, en ce que dans celle-ci on ne fait point entrer séparément dans le calcul les quantités que nous avons nommées infinitésimales, ni même leurs rapports, mais seulement les dernières valeurs de ces rapports, lesquelles étant des grandeurs finies, font de cette méthode, moins un calcul particulier, comme je viens de le dire, qu'une simple application du calcul algébrique ordinaire.

Il s'agit donc, en se bornant à introduire dans l'algèbre ordinaire, non des quantités infinitésimales, mais les dernières raisons de ces quantités, de suppléer aux moyens que fournit l'analyse infinitésimale pour découvrir les propriétés, rapports et relations quelconques des grandeurs qui composent un système proposé, et voilà ce qu'on nomme proprement méthode des limites.

Pour en expliquer la marche et en donner l'esprit, reprenons encore l'exemple traité ci-devant.

Explication de la méthode des limites proprement dite.

Il est clair, par ce qui a été dit (9), que quoique $\frac{MZ}{RZ}$ ne soit point égale à $\frac{TP}{MP}$; cependant la première de ces quantités diffère d'autant moins de la seconde, que R S est plus proche de MP, c'est-à-dire, que $\frac{MZ}{RZ} = \frac{TP}{MP}$ est une équation imparfaite; mais que (en désignant par L. l'expression de limite ou de dernière valeur) L. $\frac{MZ}{RZ} = \frac{TP}{MP}$ est une équation parfaite, ou rigoureusement exacte.

De même on prouvera que L. $\frac{MZ}{RZ} = \frac{y}{a-x}$ est aussi une équation parfaite, ou rigoureusement exacte; égalant donc ces deux valeurs de L. $\frac{MZ}{RZ}$, il vient $\frac{TP}{MP} = \frac{y}{a-x}$, ou $TP = \frac{y^2}{a-x}$ comme ci-dessus. Ainsi, ce ne sont plus dans ce nouveau calcul les quantités infiniment petites MZ et RZ qui y entrent séparément, ni même leur rapport $\frac{MZ}{RZ}$, mais seulement sa limite ou dernière valeur L. $\frac{MZ}{RZ}$, qui est une quantité finie.

Cette méthode est plus difficile à mettre en pratique que l'analyse infinitésimale

(39) Si cette méthode étoit toujours aussi facile à mettre en usage que l'analyse infinitésimale ordinaire, elle pourroit paroître préférable ; car elle auroit l'avantage de conduire aux mêmes résultats par une route directe et toujours lumineuse, au lieu que celle-ci ne conduit au vrai qu'après avoir fait parcourir, s'il est permis de parler ainsi, le pays des erreurs.

Mais il faut convenir que la méthode des limites est sujette à une difficulté considérable qui n'a pas lieu dans l'analyse infinitésimale ordinaire ; c'est que ne pouvant y séparer, comme dans celle-ci, les quantités infiniment petites l'une de l'autre, et ces quantités se trouvant toujours liées deux à deux, on ne peut faire entrer dans les combinaisons les propriétés qui appartiennent à chacune d'elles en particulier, ni faire subir aux équations où elles se rencontrent toutes les transformations qui pourroient aider à les éliminer ; et cette difficulté se fait bien moins sentir dans les opérations même du calcul, que dans les propositions et les raisonnemens qui préparent ou suppléent à ces opérations.

Origine de la dénomination attribuée aux quantités infiniment petites.

(40) Il paroît, par ce que nous avons dit (2) sur l'origine que peut avoir eue l'analyse

infinitésimale, que les quantités qu'on a nommées infiniment petites, ont reçu cette dénomination, parce qu'on croyoit en effet dans les commencemens qu'il falloit, pour le succès des calculs où l'on en fait usage, attribuer à ces arbitraires des valeurs qui fussent réellement moindres que tout ce qui peut tomber sous les sens et que tout ce que l'imagination peut concevoir; mais une métaphysique plus réfléchie a fait voir que cela est inutile, parce que le succès du calcul vient, non de l'atténuation de ces quantités arbitraires, mais uniquement de la compensation des erreurs qu'elles occasionnent dans ce calcul.

En effet, nous avons vu dans l'exemple traité que les procédés et les résultats du calcul étoient absolument les mêmes, quelque valeur qu'on attribuât aux quantités infiniment petites MZ, RZ, et que par conséquent le caractère des quantités de cette espèce ne consiste pas dans leur petitesse réelle, mais bien plutôt dans leur indétermination absolue; c'est-à-dire, dans la propriété qu'elles ont de rester arbitraires pendant tout le calcul, et tellement indépendantes des quantités proposées, qu'on demeure toujours maître de les prendre aussi petites qu'on veut sans rien changer aux conditions du problême.

Les quantités infinitésimales, comme je l'ai déjà dit (24), ne sont donc pas des êtres chimériques, mais de simples quantités variables caractérisées par la nature de leur limite; qui est o, pour les quantités infiniment petites; et $\frac{1}{o}$, pour les quantités infiniment grandes. On peut donc attribuer successivement à ces indéterminées, de même qu'à toutes les autres quantités indéfinies, diverses valeurs arbitraires, et parmi ces valeurs, on doit compter la dernière de toutes qui est o pour les quantités infiniment petites, et $\frac{1}{o}$ pour les quantités infinies.

Distinction de l'infini mathématique en infini sensible et infini absolu.

(41) Cette observation donne lieu de distinguer l'infini mathématique en deux espèces; savoir, l'infini *sensible* ou *assignable*, et l'infini *absolu* ou *métaphysique*, lequel n'est autre chose que la limite du premier.

Si donc on assigne à une quantité quelconque infiniment petite une valeur déterminée qui ne soit point o, cette valeur sera ce que j'appelle quantité infiniment petite, *sensible* ou *assignable*, et que je désignerai aussi par le nom d'*infiniment petite*; au lieu que si cette valeur est la dernière de toutes, c'est-à-dire, si elle est absolument nulle, elle sera

alors ce que j'appelle quantité infiniment petite *absolue* ou *métaphysique*, et que je désignerai aussi par le nom de quantité *évanouissante*.

Ainsi, une quantité évanouissante n'est pas ce qu'on appelle en général quantité infiniment petite, mais seulement la dernière valeur de cette quantité; ce n'est, dis-je, qu'une valeur déterminée qu'on peut attribuer comme toute autre à cette grandeur arbitraire qu'on nomme en général infiniment petite.

(42) La considération de ces quantités évanouissantes seroit à peu-près inutile, si on se bornoit à les traiter dans le calcul comme des quantités simplement nulles; car elles n'offriroient plus alors que le rapport vague de o à o, qui n'est pas plus égal à 2 qu'à 3 ou à une autre quantité quelconque; mais il ne faut pas perdre de vue que ces quantités nulles ont ici des propriétés particulières comme dernières valeurs des quantités indéfiniment petites dont elles sont limites, et qu'on ne leur donne la dénomination particulière d'évanouissantes que pour avertir que de tous les rapports et relations dont elles sont susceptibles en qualité de quantités nul-

les, on ne veut considérer et faire entrer dans les combinaisons du calcul que celles qui leur sont assignées par la loi de continuité ; lorsque l'on imagine le systême des quantités auxiliaires s'approchant par degrés insensibles du systême des quantités désignées : c'est ce que de grands Géomètres ont cru pouvoir exprimer en disant que les évanouissantes étoient des quantités considérées, non avant qu'elles s'évanouissent, non après qu'elles sont évanouies, mais à l'instant même qu'elles s'évanouissent.

Dans le cas traité ci-devant, par exemple, tant que RS ne coïncide point avec MP, la fraction $\frac{MZ}{RZ}$ est plus grande que $\frac{TP}{y}$ ; ces deux fractions ne deviennent égales qu'au moment où MZ et RZ se réduisent à zéro : il est vrai qu'alors $\frac{MZ}{RZ}$ est aussi bien égale à toute autre quantité qu'à $\frac{TP}{y}$, puisque $\frac{o}{o}$ est une quantité absolument arbitraire ; mais parmi les diverses valeurs qu'on peut attribuer à $\frac{MZ}{RZ}$, $\frac{TP}{y}$ est la seule qui soit assujettie à la loi de continuité et déterminée par elle ; car si l'on construisoit une courbe dont

l'abscisse

l'abscisse fût la quantité indéfiniment petite MZ, et l'ordonnée proportionnelle à $\frac{MZ}{RZ}$, celle qui répondroit à l'abscisse nulle, seroit représentée par $\frac{TP}{y}$, et non par une quantité arbitraire : or, c'est ce qui distingue les quantités que je nomme évanouissantes de celles qui sont simplement nulles.

Ainsi, quoiqu'en général on ait $0=2\times 0=3\times 0=4\times 0=$ etc., on ne peut pas dire d'une quantité évanouissante telle que MZ, $MZ=2MZ=3MZ=4MZ=$ etc.; car la loi de continuité ne peut assigner entre MZ et MZ d'autre rapport que celui d'égalité, ni d'autre relation que celle d'identité.

(43) Nous avons vu qu'en introduisant dans le calcul des quantités indéfiniment petites, et en les négligeant par comparaison aux quantités finies, les équations devenoient imparfaites, et que les erreurs auxquelles on donnoit lieu ne se compensoient que dans le résultat cherché. On peut maintenant éviter, si l'on veut, cette espèce d'inconvénient par le moyen des évanouissantes, qui, n'étant autre chose que les dernières valeurs des quantités indéfiniment petites correspondantes, peuvent, comme toutes autres va-

leurs, être attribuées à ces quantités indéfiniment petites; et qui, d'un autre côté, étant absolument nulles, peuvent se négliger, lorsqu'elles se trouvent ajoutées à quelques quantités effectives, sans que le calcul cesse d'être parfaitement rigoureux.

(44) On peut donc envisager l'analyse infinitésimale sous deux points de vue différens; en considérant les quantités infiniment petites ou comme des quantités effectives, ou comme des quantités absolument nulles. Dans le premier cas, l'analyse infinitésimale n'est autre chose qu'un calcul d'erreurs compensées; et dans le second, c'est l'art de comparer des quantités évanouissantes entre elles et avec d'autres, pour tirer de ces comparaisons les rapports et relations quelconques qui existent entre des quantités proposées.

Comme égales à zéro, ces quantités évanouissantes doivent se négliger dans le calcul, lorsqu'elles se trouvent ajoutées à quelque quantité effective ou qu'elles en sont retranchées; mais elles n'en ont pas moins, comme on vient de le voir, des rapports très-intéressans à connoître, rapports qui sont déterminés par la loi de continuité à laquelle est assujetti le systême des quantités auxiliaires dans son changement. Or, pour saisir aisé-

ment cette loi de continuité, il est aisé de sentir qu'on est obligé de considérer les quantités en question à quelque distance du terme où elles s'évanouissent entièrement, sinon elles n'offriroient que le rapport indéfini de zéro à zéro ; mais cette distance est arbitraire et n'a d'autre objet que de faire juger plus facilement des rapports qui existent entre ces quantités évanouissantes : ce sont ces rapports qu'on a en vue en regardant les quantités infiniment petites comme absolument nulles, et non pas ceux qui existent entre les quantités qui ne sont pas encore parvenues au terme de leur anéantissement. Celles-ci, que j'ai nommées indéfiniment petites, ne sont point destinées à entrer elles-mêmes dans le calcul envisagé sous le point de vue dont il s'agit dans ce moment, mais employées seulement pour aider l'imagination, et indiquer la loi de continuité qui détermine les rapports et les relations quelconques des quantités évanouissantes auxquelles elles répondent.

Ainsi, d'après cette hypothèse, dans la proportion MZ : RZ :: TP : MP, les quantités représentées par MZ et RZ sont bien supposées absolument égales à zéro ; mais comme c'est de leur rapport qu'on a besoin, il faut pour

D 2

appercevoir son égalité avec $\frac{TP}{MP}$, considérer les quantités indéfiniment petites qui répondent à ces quantités nulles, non afin de les introduire elles-mêmes dans le calcul, mais afin d'y faire entrer sous la dénomination de MZ et de RZ, les quantités évanouissantes qui en sont les dernières valeurs.

(45) Ces expressions MZ, RZ représentent donc ici des quantités nulles, et on ne les emploie sous les formes M Z, RZ, plutôt que sous la forme commune o, que parce que si on les employoit en effet sous cette dernière forme, on ne pourroit plus distinguer, dans les opérations où elles se trouveroient mêlées, leurs diverses origines, c'est-à-dire, quelles sont les diverses quantités indéfiniment petites qui leur répondent. Or, la considération, au moins mentale, de celles-ci, est nécessaire pour saisir la loi de continuité qui détermine le rapport cherché des quantités évanouissantes qu'elles ont pour limites, et par conséquent il est essentiel de ne pas les perdre de vue et de les caractériser par des expressions qui empêchent de les confondre.

(46) Les quantités évanouissantes qui font le sujet du calcul infinitésimal envisagé sous ce nouveau point de vue, sont à la vérité

des êtres de raison ; mais cela n'empêche pas qu'elles n'aient des propriétés mathématiques, et qu'on ne puisse les comparer tout aussi bien qu'on compare des quantités imaginaires qui n'existent pas davantage ; car il est tout aussi vrai de dire, par exemple, que

$$60 = 20 + 40 \text{ que } \sqrt{-a} = \sqrt{-b} \times \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Or, personne ne révoque en doute l'exactitude des résultats qu'on obtient par le calcul des imaginaires, quoiqu'elles ne soient que des formes algébriques et des hiéroglyphes de quantités absurdes ; à plus forte raison ne peut-on donner l'exclusion aux quantités évanouissantes qui sont au moins des limites de quantités effectives, et touchent pour ainsi dire à l'existence. Qu'importe en effet que ces quantités soient ou non des êtres chimériques, si leurs rapports ne le sont pas, et que ces rapports soient la seule chose qui nous intéresse ? On est donc entièrement maître, en soumettant au calcul les quantités que nous avons nommées infinitésimales, de regarder ces quantités comme des quantités effectives, ou comme absolument nulles ; et la différence qui se trouve entre ces deux manières d'envisager la question, consiste en ce que regardant ces quantités comme nulles, les propo-

sitions, équations et résultats quelconques, sont toujours exacts et rigoureux, mais se rapportent à des quantités qui sont des êtres de raison, et expriment des relations qui existent entre quantités qui n'existent pas elles-mêmes : au lieu qu'en regardant les quantités infiniment petites comme quelque chose d'effectif, les propositions, équations et résultats quelconques ont bien pour sujet de véritables quantités; mais ces propositions, équations et résultats sont faux, ou plutôt ils sont imparfaits, et ne deviennent exacts à la fin que par la compensation de leurs erreurs, compensation cependant qui est une suite nécessaire et infaillible des opérations du calcul.

(47) La métaphysique qui vient d'être exposée fournit aisément des réponses à toutes les objections qui ont été faites contre l'analyse infinitésimale dont plusieurs Géomètres ont cru le principe fautif et capable d'induire en erreur; mais ils ont été accablés, si l'on peut s'exprimer ainsi, par la multitude des prodiges, et par l'éclat des vérités qui sortoient en foule de ce principe.

Ces objections peuvent se réduire à celle-ci : ou les quantités qu'on nomme infiniment petites sont absolument nulles, ou non; car

il est ridicule de supposer qu'il existe des êtres qui tiennent le milieu entre la quantité et le zéro. Or, si elles sont absolument nulles, leur comparaison ne mène à rien, puisque le rapport de o à o n'est pas plus *a* que *b*, ou toute autre quantité quelconque ; et si elles sont des quantités effectives, on ne peut sans erreur les traiter comme nulles, ainsi que le prescrivent les règles de l'analyse infinitésimale.

La réponse est simple : bien loin de ne pouvoir en effet considérer les quantités infiniment petites, ni comme quelque chose de réel, ni comme rien, on peut dire au contraire qu'on peut à volonté les regarder comme nulles ou comme de véritables quantités; car ceux qui voudront les regarder comme nulles, peuvent répondre que ce qu'ils nomment quantités infiniment petites ne sont point des quantités nulles quelconques, mais des quantités nulles assignées par une loi de continuité qui en détermine la relation ; que parmi tous les rapports dont ces quantités sont susceptibles comme zéro, ils ne considèrent que ceux qui sont déterminés par cette loi de continuité; et qu'enfin ces rapports ne sont point vagues et arbitraires, puisque cette loi de continuité n'assigne point, par exemple,

plusieurs rapports différens aux différentielles de l'abscisse et de l'ordonnée d'une courbe lorsque ces différentielles s'évanouissent, mais un seul, qui est celui de la sous-tangente à l'ordonnée. D'un autre côté, ceux qui regardent les quantités infiniment petites comme de véritables quantités, peuvent répondre que ce qu'ils appellent infiniment-petit n'est qu'une grandeur arbitraire et indépendante des quantités proposées; que dès-lors, sans la supposer nulle, on peut cependant la traiter comme telle sans qu'il s'ensuive aucune erreur dans le résultat, puisque cette erreur, si elle avoit lieu, seroit arbitraire comme la quantité qui l'auroit occasionnée. Or, il est évident qu'une pareille erreur ne peut exister qu'entre des quantités dont quelqu'une au moins soit arbitraire. Donc lorsqu'on est parvenu à un résultat qui n'en contient plus, et qui exprime une relation quelconque entre les quantités données et celles qui sont déterminées par les conditions du problême, on peut assurer que ce résultat est exact, et que par conséquent les erreurs qui auroient dû être commises en exprimant ces conditions ont pu se compenser et disparoître par une suite nécessaire et infaillible des opérations du calcul.

(48) D'autres Géomètres, embarrassés ap-

paremment par l'objection qu'on vient de discuter, se sont attachés simplement à prouver que la méthode des limites dont les procédés sont rigoureusement exacts dans tous les points, devoit nécessairement conduire aux mêmes résultats que l'analyse infinitésimale. Mais en convenant que le principe de cette méthode est très-lumineux, on ne peut se dissimuler qu'ils ne font qu'éluder la difficulté sans la résoudre; que la méthode des limites ne mène aux résultats de l'analyse infinitésimale que par une route difficile et détournée; et qu'enfin cette méthode, loin d'être la même que celle du calcul de l'infini, n'est au contraire que l'art de s'en passer et d'y suppléer par le calcul algébrique ordinaire : en quoi l'on réussiroit d'une manière plus simple, à ce qu'il me semble, par la méthode des indéterminées. Mais pourquoi adopteroit-on l'une de ces méthodes à l'exclusion des autres, puisqu'elles peuvent se prêter un secours mutuel? Employons donc tout ensemble, et l'analyse infinitésimale proprement dite, et la méthode des limites, et celle des indéterminées, suivant que les circonstances l'indiquent, et ne négligeons aucun des moyens qui peuvent nous conduire à la connoissance de la vérité, ou en simplifier la recherche.

Il me reste à montrer par quelques exemples l'application des principes généraux que je viens d'expliquer ; et c'est ce que je vais faire en donnant une idée des calculs différentiel et intégral, lesquels sont, à proprement parler, l'analyse infinitésimale elle-même réduite en pratique.

Principes des calculs différentiel et intégral.

(49) Si l'on attribue successivement à une même quantité variable deux valeurs infiniment peu différentes l'une de l'autre, la différence de la seconde de ces deux valeurs à la première sera nommée *différentielle* de cette première valeur.

Soit, par exemple, AMN (*Fig.* 2) une courbe relativement à laquelle on ait une question quelconque à résoudre, et telle que l'ordonnée MP soit une des quantités désignées par cette question. Je suppose de plus que pour faciliter la solution, l'on mène parallèlement à MP et à une distance arbitraire de cette ordonnée, une ligne auxiliaire NQ, et qu'ensuite cette ligne se rapproche continuellement de MP jusqu'à ce qu'elle coïncide avec elle ; la ligne NO, ou NQ—MP sera donc (19) une quantité infiniment petite. Or comme elle est la différence des deux valeurs NQ, MP, attribuées successivement à l'ordonnée, on est convenu de la désigner dans le

discours par l'expression diminutive de différentielle de la variable MP, et de la représenter dans le calcul par cette même variable précédée de la caractéristique $d$ : ainsi, en nommant $y$ l'ordonnée MP, $dy$ signifiera la même chose que différentielle de MP.

Mais supposer, comme nous l'avons fait, que NQ s'approche perpétuellement de MP, c'est supposer que AQ s'approche aussi perpétuellement de AP; car la première de ces deux suppositions entraîne nécessairement la seconde; donc en nommant $x$ l'abscisse AP, PQ ou MO sera la différentielle de $x$, et l'on aura $MO = dx$ en même-tems que $NO = dy$.

Si l'on suppose de plus $NQ = y'$ et $AQ = x'$, on aura $y' = y + dy$ et $x' = x + dx$; c'est-à-dire, que les différentielles $dy$ et $dx$ ne sont autre chose que les accroissemens des variables correspondantes $y$ et $x$, ou les quantités dont elles augmentent lorsquelles deviennent $y'$ et $x'$.

(50) Maintenant soit attribuée à l'ordonnée une nouvelle valeur RS, telle que PQ et QS diffèrent infiniment peu l'une de l'autre, ou aient pour dernière raison une raison d'égalité; pour que cela soit, il faut évidemment,

puisque N Q par la première hypothèse est déjà supposée s'approcher perpétuellement de MP, il faut, dis-je, que RS s'approche aussi perpétuellement de la même ligne MP, de manière qu'elle finisse comme NQ par coïncider avec elle; autrement il est clair que le rapport de QS à PQ, lequel doit par hypothèse s'approcher sans cesse de l'unité, s'en éloigneroit : ainsi les rapports de NQ à MP, de RS à MP, de RS à NQ et de QS à PQ, auront tous pour limite le rapport d'égalité. Il est visible de plus qu'à cause de la loi de continuité, le rapport de RZ à NO sera dans le même cas. Donc, suivant la notion générale que nous venons de donner ci-dessus des quantités différentielles, QS doit être la différentielle de AQ, RZ celle de NQ, QS—PQ ou NZ—MO celle de PQ, et enfin RZ—NO celle de NO; de même que NO ou NQ—MP est celle de MP. Donc, conformément à la convention faite au sujet de la manière d'exprimer les différentielles dans le calcul, nous devons avoir $QS = dx'$, $RZ = dy'$, $QS - PQ = d(MO)$, $RZ - NO = d(NO)$. Mais nous avons déjà trouvé $MO = dx$, $NO = dy$; donc $QS - NQ = ddx$, $RZ - NO = ddy$; c'est-à-dire, que les quantités $ddx$ et $ddy$ (qu'on écrit aussi de cette manière $d^2x$, $d^2y$)

seront les différentielles des différentielles de $x$ et $y$, et c'est ce que, pour abréger, on nomme encore *différences secondes* ou *différentielles du second ordre ;* c'est-à-dire, que $ddx$ est la différentielle du second ordre ou la différence seconde de $x$, et $ddy$ celle de $y$.

Or, puisque QS et PQ sont supposées infiniment peu différentes l'une de l'autre, leur différence $ddx$ est infiniment petite relativement à chacune d'elles (28). Donc les différences du second ordre sont infiniment petites relativement aux différentielles premières ou du premier ordre (*).

(51) On peut différentier pareillement à leur tour les différentielles du second ordre, et de cette *différentiation* résulteront les

(*) Si au lieu de mener la nouvelle ligne auxiliaire RS de manière que les lignes QS et PQ diffèrent infiniment peu l'une de l'autre, on la mène telle que QS soit précisément égale à PQ, c'est-à-dire, telle que AP, AQ, AS soient en progression arithmétique, on aura $ddx = 0$, ou $dx$ constant : ainsi on peut supposer l'une des différentielles constante ; mais de ce que AP, AQ, AS sont en progression arithmétique, il ne s'ensuit pas que MP, NQ, RS, y soient aussi, à moins que la ligne AMN ne soit droite : ainsi, de ce que $ddx$ seroit supposée égale à zéro, il ne s'ensuivroit pas que l'on eût aussi $ddy = 0$.

différentielles du troisième ordre ; de la différentiation de celle-ci résulteront celles du quatrième ordre, et ainsi de suite : de manière que *dddy*, ou $d^3y$, sera la différence troisième de $y$ ; *ddddy*, ou $d^4y$, la différentielle du quatrième ordre, etc. Or, d'après ce que nous venons de dire sur la génération des différentielles du premier et du second ordre, il est aisé de comprendre comment doit se faire celle des ordres supérieurs ; ainsi je ne m'y arrêterai pas ; je dirai seulement que c'est en attribuant pour chaque nouvel ordre une nouvelle valeur auxiliaire à chacune des variables, telle que, non-seulement chacune de ces nouvelles valeurs diffère infiniment peu de celle qui la précède, mais que la même chose ait lieu entre leurs différentielles, les différentielles de leurs différentielles, et ainsi de suite.

(52) *Différentier* une quantité, c'est assigner sa différentielle ; c'est-à-dire, que si X, par exemple, est une fonction quelconque de $x$, la différentier ce sera assigner la quantité dont cette fonction augmentera en supposant que $x$ augmente de $dx$.

*Intégrer* ou sommer une différentielle, au contraire, c'est revenir de cette différentielle

à la quantité qui l'a produite par sa différentiation, et cette dernière quantité s'appelle *intégrale* ou *somme* de la différentielle proposée : ainsi $x$, par exemple, est l'intégrale ou la somme de $dx$, et intégrer ou sommer $dx$ n'est autre chose qu'assigner cette quantité $x$ qui en est la somme ou l'intégrale.

Nous avons vu que la différentielle d'une quantité s'exprime dans le calcul par cette même quantité précédée de la caractéristique $d$ ; réciproquement, on est convenu d'exprimer l'intégrale ou la somme d'une différentielle quelconque par cette même différentielle précédée de la caractéristique $\int$ ; c'est-à-dire, que $\int dx$, par exemple, signifie la même chose que somme de $dx$ : ainsi l'on a évidemment $x = \int dx$.

(53) On nomme *calculs différentiel et intégral* l'art de trouver les rapports et relations quelconques qui existent entre des quantités proposées, par le secours de leurs différentielles. Le nom de *calcul différentiel* s'appliquant proprement à l'art de rechercher les rapports ou relations des quantités différentielles et de les éliminer ensuite par les règles ordinaires de l'algèbre, et celui de *calcul intégral* à l'art d'intégrer ou d'éliminer ces

mêmes quantités différentielles par les procédés qui enseignent à revenir d'une différentielle à son intégrale.

Mon but ici n'est point d'écrire un traité de ces calculs ; mais seulement d'en indiquer les règles fondamentales, et de montrer que ces règles ne sont autre chose qu'une application des principes généraux qui viennent d'être exposés.

(54) Proposons-nous donc d'abord d'assigner la différentielle de la somme $x+y+z+$ etc. de plusieurs variables.

Par hypothèse $x$ devient $x+dx$, $y$ devient $y+dy$, etc. Donc la somme proposée devient $x+dx+y+dy+z+dz+$ etc. ; donc elle augmente de $dx+dy+dz+$ etc., et cette augmentation est précisément ce que nous avons appelé différentielle.

(55) On demande maintenant la différentielle de $a+b+c+$ etc. $+x+y+z+$ etc. : $a$, $b$, $c$, etc. étant des constantes, et $x$, $y$, $z$, etc. des variables.

Par hypothèse, $a$ reste $a$, $b$ reste $b$, $c$ reste $c$, etc., $x$ devient $x+dx$, $y$ devient $y+dy$, etc. Donc la somme proposée devient $a+b+c$, etc. $+x+dx+$ etc. ; donc elle augmente de $dx+dy+dz+$ etc. et cette augmentation est la

la différentielle cherchée ; donc cette différentielle est la même que s'il n'y avoit point de constantes dans la somme proposée.

On demande la différentielle de $ax$.

Par hypothèse, $a$ reste $a$, et $x$ devient $x + dx$. Donc $ax$ devient $ax + adx$; donc il augmente de $adx$, et cette augmentation est la différentielle cherchée.

(56) On demande la différentielle de $xy$.

On voit par ce qui précède qu'elle est $ydx + xdy + dxdy$, c'est-à-dire, qu'on a $d.xy = ydx + xdy + dxdy$.

Mais j'observe, à l'égard de cette équation, que $dx$ et $dy$ étant infiniment petits relativement à $x$ et $y$, le dernier terme $dxdy$ est lui-même infiniment petit relativement à chacun des autres, c'est-à-dire, que le quotient de ce dernier terme par chacun des autres est une quantité infiniment petite. Donc si on le néglige dans l'équation précédente, qui deviendra pour lors $d.xy = xdy + ydx$, cette équation sera ce que j'ai nommé une équation imparfaite. Mais puisque les équations imparfaites peuvent (31, 34) s'employer comme des équations rigoureuses, sans qu'il s'ensuive aucune erreur dans le résultat cherché, il est évident que je puis faire usage de cette dernière équation au lieu de la première ;

et comme elle est plus simple, j'abrégerai et je faciliterai dans l'occasion par son secours les opérations de mon calcul.

Je dirai donc que la différentielle d'une quantité qui est le produit de deux variables est égale au produit de la première variable, par la différentielle de la seconde, plus à celui de la seconde variable par la différentielle de la première; et cette proposition sera de celles que j'ai nommées (35) propositions imparfaites, c'est-à-dire, susceptibles d'être traduites par une équation imparfaite, et ne pouvant comme elle, conduire qu'à des résultats rigoureusement exacts (*).

(*) Si de l'équation imparfaite $d.xy = x\,dy + y\,dx$; je voulois tirer une équation rigoureuse, je le pourrois d'abord en restituant au second membre le terme $dx\,dy$ qui lui manque; mais je le pourrois aussi de la manière suivante : je diviserois tout par $dy$, par exemple, et j'aurois la nouvelle équation imparfaite $\frac{d.xy}{dy} = y\frac{dx}{dy} + x$; et comme (19) une quantité auxiliaire diffère infiniment peu de sa limite, je puis, dans l'équation précédente, mettre $lim. \left(\frac{d.xy}{dy}\right)$ à la place de $\frac{d.xy}{dy}$, et $lim. \left(\frac{dx}{dy}\right)$ à la place de $\frac{dx}{dy}$, sans que l'équation cesse d'être imparfaite (32). Or elle devient alors $lim. \left(\frac{d.xy}{dy}\right) = y \times lim. \left(\frac{dx}{dy}\right) + x$; mais toute limite est par la définition

(57) On trouvera par les mêmes procédés que ci-dessus, qu'on a l'équation imparfaite $d.xyz = xydz + xzdy + yzdx$.

On trouvera de même l'équation imparfaite $d.\frac{x}{y} = \frac{ydx - xdy}{yy}$.

On trouvera de même l'équation imparfaite $d.x^m = mx^{m-1}dx$, etc.

(58) Telles sont les principales règles du calcul différentiel; passons maintenant à celles du calcul intégral, qui est la méthode inverse.

1°. Puisque la différentielle de $x$ est $dx$, l'intégrale de $dx$ sera $x$, c'est-à-dire, qu'on aura $\int dx = x$. Mais comme la différentielle de $a+x$ est également $dx$ (55), il s'ensuit que l'intégrale de $dx$ est aussi bien $a+x$ que $x$ seul, et qu'en général chaque différentielle a autant d'intégrales diverses qu'on veut lui en donner; mais que toutes ces intégrales ne

même (17) une quantité désignée. Donc, quoique $dx$ et $dy$ soient auxiliaires, $lim. \left(\frac{d.xy}{dy}\right)$ et $lim. \left(\frac{dx}{dy}\right)$ sont des quantités désignées; donc tous les termes de l'équation précédente $lim. \left(\frac{d.xy}{dy}\right) = y \times lim. \left(\frac{dx}{dy}\right) + x$, sont des quantités désignées; donc (34) cette équation est nécessairement et rigoureusement exacte.

diffèrent que d'une quantité constante. Il suffit donc d'en déterminer une quelconque, et d'y ajouter une constante arbitraire pour représenter toutes les autres : c'est-à-dire, que toutes les intégrales possibles de $dx$ seront représentées par $x + A$, A étant une constante arbitraire.

2°. Puisque la différentielle de $x + y + z$ + etc. est $dx + dy + dz +$ etc., l'intégrale de cette différentielle sera $x + y + z +$ etc. $+ A$, A étant une constante arbitraire.

3°. La différentielle de $xy$ étant $x\,dy + y\,dx$ (56) aussi bien que celle de $xy + A$, l'intégrale de $x\,dy + y\,dx$ sera réciproquement $xy + A$, A étant une constante arbitraire.

4°. On trouvera de même que l'intégrale de $\frac{y\,dx - x\,dy}{yy}$ est $\frac{x}{y} + A$.

5°. On trouvera de même que l'intégrale de $m x^{m-1} dx$ est $x^m + A$, etc.

Telles sont les principales règles du calcul intégral ; il nous reste à montrer par quelques exemples particuliers l'application de ces règles et de celles du calcul différentiel : c'est ce que nous allons faire le plus succinctement qu'il nous sera possible.

## PROBLÈME Ier.

(59) Étant donnée une courbe elliptique AMB (*Fig.* 3.), trouver la sous-tangente TP qui répond à un point quelconque donné, M, de cette courbe. Application des principes généraux à quelques exemples.

Que AB soit le grand axe de la courbe: nommons $a$ la moitié de ce grand axe, $b$ le demi petit axe, $x$ l'abscisse AP, et $y$ l'ordonnée PM; nous aurons donc $yy = \frac{bb}{aa}(2ax - xx)$. Cela posé, soit menée une nouvelle ordonnée NQ infiniment proche de MP, c'est-à-dire, que cette ligne auxiliaire NQ soit d'abord menée à une distance quelconque arbitraire de MP, et qu'ensuite elle soit imaginée s'en rapprocher continuellement, de sorte que leur dernière raison soit une raison d'égalité; les lignes MO, NO seront donc (49) les différentielles respectives de $x$ et $y$. Or les triangles semblables TPM, MZO donnent $\frac{TP}{MP} = \frac{MO}{ZO} = \frac{MO}{NO+ZN}$. Mais il est évident que plus NQ s'approche de MP, plus ZN diminue relativement à NO, et que leur dernière raison est o. Donc ZN est infiniment petite relativement à NO; donc $\frac{TP}{MP} = \frac{MO}{NO}$ est une équation impar-

faite (31); c'est-à-dire, que $\frac{TP}{y}=\frac{dx}{dy}$ est une équation imparfaite.

D'un autre côté, l'équation de la courbe étant $yy=\frac{bb}{aa}(2ax-xx)$, nous aurons, en la différentiant, cette autre équation imparfaite, $ydy=\frac{bb}{aa}(adx-xdx)$; substituant donc dans cette dernière la valeur de $dx$ tirée de la première, et réduisant, nous aurons $TP=\frac{aa}{bb}\times\frac{yy}{a-x}$; équation qui, ne renfermant plus de quantités infinitésimales, est nécessairement et rigoureusement exacte (34).

(60) *Autre solution.* Considérons la courbe proposée comme un polygone d'une infinité de côtés; c'est à-dire, prenons à la place de la courbe proposée un polygone d'un nombre quelconque de côtés, et supposons ensuite que ce nombre de côtés augmente perpétuellement, de manière que la dernière relation de ce polygone avec la courbe soit une relation d'identité. Comme il est absolument impossible que la courbe puisse être exactement considérée comme un polygone, les équations par lesquelles j'exprimerai les conditions du problème en partant de cette hypothèse ne seront

point exactes ; mais puisque le polygone est supposé s'approcher sans cesse de la courbe, les erreurs qui pourront se trouver dans ces équations s'atténueront autant qu'on le voudra, et partant, ces mêmes équations seront de celles que j'ai nommées imparfaites.

Ainsi les triangles T'MP, MNO me donnent l'équation $\frac{T'P}{MP} = \frac{MO}{NO}$; substituant TP à T'P qui en diffère infiniment peu, on aura cette équation imparfaite, $\frac{TP}{MP} = \frac{MO}{NO}$ ou $\frac{TP}{y} = \frac{dx}{dy}$, la même que celle qui a été trouvée ci-dessus, et qui, combinée avec celle de la courbe, me donnera le même résultat.

(61) On peut encore, si l'on veut, appliquer à cette question la méthode des indéterminées sans rien changer au procédé du calcul. En effet, après avoir trouvé les deux équations imparfaites $\frac{TP}{y} = \frac{dx}{dy}$ et $2\,y\,dy = \frac{bb}{aa}\,(2\,a\,dx - 2\,x\,dx)$, j'ajoute mentalement à l'un des membres de la première, pour la rendre rigoureusement exacte, une quantité $\varphi$ ; j'introduis pareillement dans la seconde une quantité $\varphi'$ qui la rende de même rigoureusement exacte : les quantités sous-entendues $\varphi$ et $\varphi'$ sont donc infiniment petites

relativement à celles auxquelles on les ajoute mentalement. Cela posé, je compare les deux équations précédentes sans avoir égard à ces quantités $\varphi$ et $\varphi'$; l'équation $TP = \frac{aa}{bb} \frac{yy}{a-x}$ qui en résultera, pouvant n'être pas exacte, j'y ajoute encore mentalement une quantité $\varphi''$ qui la rende telle. Mais comme cette quantité $\varphi''$ ne peut qu'être infiniment petite, je reconnois bientôt qu'elle est absolument nulle, parce que les autres termes de l'équation ne renferment plus de quantités infinitésimales; car en faisant passer tous les termes dans un seul membre, l'équation qui sera alors $\left(TP - \frac{bb}{aa} \frac{yy}{a-x}\right) + \varphi'' = 0$, ne pourra avoir lieu suivant la méthode des indéterminées, sans que chacun de ses termes en particulier ne soit égal à zéro : donc $\varphi'' = 0$, et $TP = \frac{bb}{aa} \frac{yy}{a-x}$, comme ci-dessus.

(62) En général, il est clair d'après ce qui vient d'être dit, que si l'on nomme P la soustangente d'une courbe quelconque, on aura l'équation imparfaite $P = y \frac{dx}{dy}$; donc (34) on aura l'équation rigoureusement exacte $P = y \times lim. \left(\frac{dx}{dy}\right)$.

Si l'on nomme Q l'angle compris entre la tangente de la courbe en un point quelconque et l'ordonnée correspondante, on aura évidemment, *tang.* $Q = \frac{P}{y}$ et *cot.* $Q = \frac{y}{P}$; donc on aura les équations imparfaites, *tang.* $Q = \frac{dx}{dy}$ et *cot.* $Q = \frac{dy}{dx}$, ou les équations rigoureuses, *tang.* $Q. = lim. \left(\frac{dx}{dy}\right)$ et *cot.* $Q = lim. \left(\frac{dy}{dx}\right)$.

## PROBLÊME II.

(63) On demande la valeur qu'il faut attribuer à $x$ pour que la fonction $\sqrt{2ax - xx}$ soit un *maximum*, c'est-à-dire plus grande que si l'on attribuoit à $x$ une autre valeur quelconque.

Soit $\sqrt{2ax - xx} = y$ ou $yy = 2ax - xx$, et construisons une courbe dont l'abscisse soit $x$ et l'ordonnée $y$, la question sera donc de trouver la plus grande ordonnée de cette courbe. Soit AMB (*Fig.* 4.) cette courbe et MP sa plus grande ordonnée : cela posé, puisqu'à compter du point M les autres ordonnées décroissent, soit du côté de A, soit du côté de B, il est clair que la tangente de la courbe au point M doit être parallèle à AB. Donc en nommant, comme ci-dessus, Q l'an-

gle formé par la tangente de la courbe et l'ordonnée, on aura au point M, *cot.* Q$=$o, ou (62) *lim.* $\left(\frac{dy}{dx}\right)=0$. Je différentie donc l'équation de la courbe, et j'ai l'équation imparfaite $ydy=adx-xdx$ ou $\frac{dy}{dx}=\frac{a-x}{y}$; donc j'ai l'équation rigoureuse *lim.* $\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{a-x}{y}$ ou *cot.* Q $=\frac{a-x}{y}$. Or on doit avoir *cot.* Q$=$o; donc $\frac{a-x}{y}=0$, ou enfin $a=x$, ce qu'il falloit trouver.

(64) Le procédé à suivre pour trouver la plus grande ordonnée d'une courbe quelconque, est donc de différentier l'équation, d'en tirer la valeur de *lim.* $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, et de l'égaler à zéro. On énonce communément cette règle en disant simplement qu'il faut différentier $y$ et égaler $dy$ à zéro; mais si cet énoncé est plus court, il est aussi moins exact.

## PROBLÊME III.

(65) Une courbe proposée ayant un point d'inflexion, déterminer l'abscisse ou l'ordonnée qui lui répond.

Soit ABMN (*Fig.* 5.) la courbe proposée; que AP soit l'abscisse, et MP l'ordonnée

correspondante au point d'inflexion cherché M ; soit menée une tangente MK à ce point d'inflexion ; il est visible que l'angle KMP est un *minimum*, c'est-à-dire, moindre que l'angle LNQ formé par une autre tangente quelconque NL et l'ordonnée correspondante NQ ; donc la tangente de l'angle KMP est aussi un *minimum*, et sa cotangente un *maximum* ; mais cette cotangente est en général (62) $lim.\left(\frac{dy}{dx}\right)$ : donc on doit avoir (63) $lim.\left(\frac{d.\,lim.\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}\right) = 0$, ce qu'il falloit trouver.

Soit, par exemple, $b^2 y = ax^2 - x^3$ l'équation de la courbe proposée, je différentie, et j'ai l'équation imparfaite $b^2\,dy = 2ax\,dx - 3x^2 dx$, ou l'équation rigoureuse $lim.\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{2ax - 3x^2}{b^2}$, il faut donc que $\frac{2ax - 3x^2}{b^2}$ soit un *maximum*, ou que $lim.\left(\frac{d\,(2ax - 3x^2)}{dx}\right) = 0$ ; c'est-à-dire, qu'on doit avoir $2a - 6x = 0$, ou $x = \frac{1}{3}a$.

## PROBLÈME IV.

(66) Trouver la surface d'un segment parabolique.

Soit AMP ce segment (*Fig.* 6.); si nous supposons que l'abscisse AP augmente d'une quantité infiniment petite PQ, ce segment augmentera en même tems de la quantité MNPQ; c'est-à-dire, que PQ étant supposée la différentielle de $x$, MNPQ sera la différentielle du segment cherché. Donc réciproquement le segment cherché est l'intégrale de MNPQ, c'est à-dire, qu'on a AMP$=\int$(MNPQ); mais si l'on abaisse MO perpendiculairement à NQ, il est évident que la dernière raison de l'espace MNO à l'espace MOPQ est o; donc le premier de ces espaces est infiniment petit à l'égard du second; donc on a l'équation imparfaite MNPQ$=$MOPQ. Substituant donc la seconde de ces quantités à la première, dans l'équation exacte AMP $=\int$(MNPQ), on aura l'équation imparfaite AMP$=\int$(MOPQ), ou AMP$=\int y\,dx$: mais l'équation de la courbe est, en nommant P son paramètre, $yy=Px$, d'où l'on tire l'équation imparfaite $dx=\frac{2y\,dy}{P}$; en mettant donc pour $dx$, dans la première de ces équations imparfaites, sa valeur tirée de la seconde, on aura cette nouvelle équation imparfaite AMP $=\int\frac{2y^2\,dy}{P}$. Mais (58) on a $\int\frac{2y^2\,dy}{P}=\frac{\frac{2}{3}y^3}{P}$; donc AMP

$= \frac{\frac{2}{3} y^3}{p}$, équation qui, ne contenant plus que des quantités désignées, ne peut être que rigoureusement exacte : ce qu'il falloit trouver.

La même méthode s'applique évidemment à la quadrature de toute autre courbe, et par des raisonnemens analogues, il est aisé de l'étendre à leur rectification et à la recherche des solides quelconques.

(68) Ce petit nombre d'exemples doit suffire pour faire comprendre quel est l'esprit de l'analyse infinitésimale. En vain ses adversaires diront-ils que c'est ruiner la certitude des mathématiques que d'y admettre des erreurs, comme on le fait, en employant des équations imparfaites ; ces errreurs peuvent-elles avoir des conséquences dangereuses, puisqu'on a des moyens infaillibles pour les faire disparoître, et des signes certains pour connoître lorsqu'elles ont disparu? Renoncera-t-on aux avantages immenses que procure ce calcul, de peur de s'écarter un instant des procédés rigoureux de la géométrie élémentaire, ou préférera-t-on à la route unie et facile par laquelle cette analyse nous mène aux découvertes, un sentier épineux où il est si difficile de ne point s'égarer ? Tel est celui qu'offre **Conclusion.**

la méthode des limites lorsqu'on veut l'employer exclusivement. Car ceux qui veulent proscrire la notion des quantités infinitésimales sont réduits, ou à la suppléer par l'algèbre commune, ce qui présente des difficultés sans nombre, ou à se servir continuellement des noms d'infini et d'infiniment petit en même tems qu'ils les dénigrent, si l'on peut s'exprimer ainsi, et qu'ils traitent de chimère l'existence des choses mêmes dont ils sont les hiéroglyphes. On n'emploie, dit-on, ces termes que figurément; mais je demande si un langage figuré et abstrus est celui qui convient à la simplicité des mathématiques, et sur-tout à cette rigueur dont on veut s'étayer pour condamner la théorie de l'infini. Ces deux méthodes ne reviennent-elles pas au même, ou plutôt ne sont-elles pas la même méthode employée diversement? En un mot, ne sont-ce pas toujours les mêmes idées à rendre, les mêmes relations à exprimer? Pourquoi donc ne pas rendre ces idées, ne pas exprimer ces relations de la manière la plus claire et la plus simple?

*FIN.*

# TABLE.

Fin de la Table.

*Nota.* On trouve chez le même Libraire l'*Essai sur les Machines en général*, du même Auteur.

DE L'IMPRIMERIE DE LE CLERC, rue des Noyers, N°. 34.

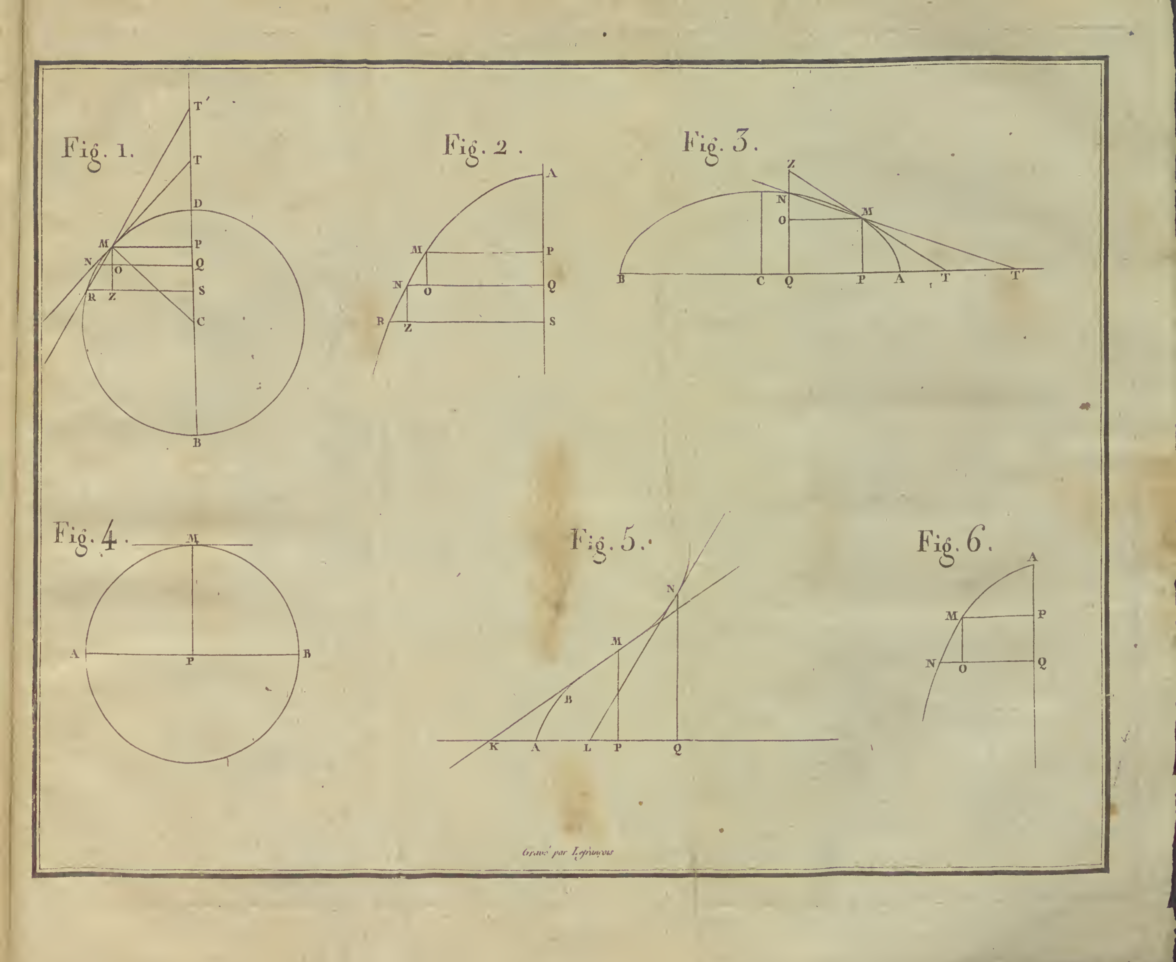


Fig. 1.
T′
T
D
M
P
N
Q
O
R
Z
S
C
B
Fig. 2.
A
M
P
N
O
Q
R
Z
S
Fig. 3.
Z
N
M
O
B
C
Q
P
A
T
T′
Fig. 4.
M
A
P
B
Fig. 5.
N
M
B
K
A
L
P
Q
Fig. 6.
A
M
P
N
O
Q
Gravé par Lefrançois

